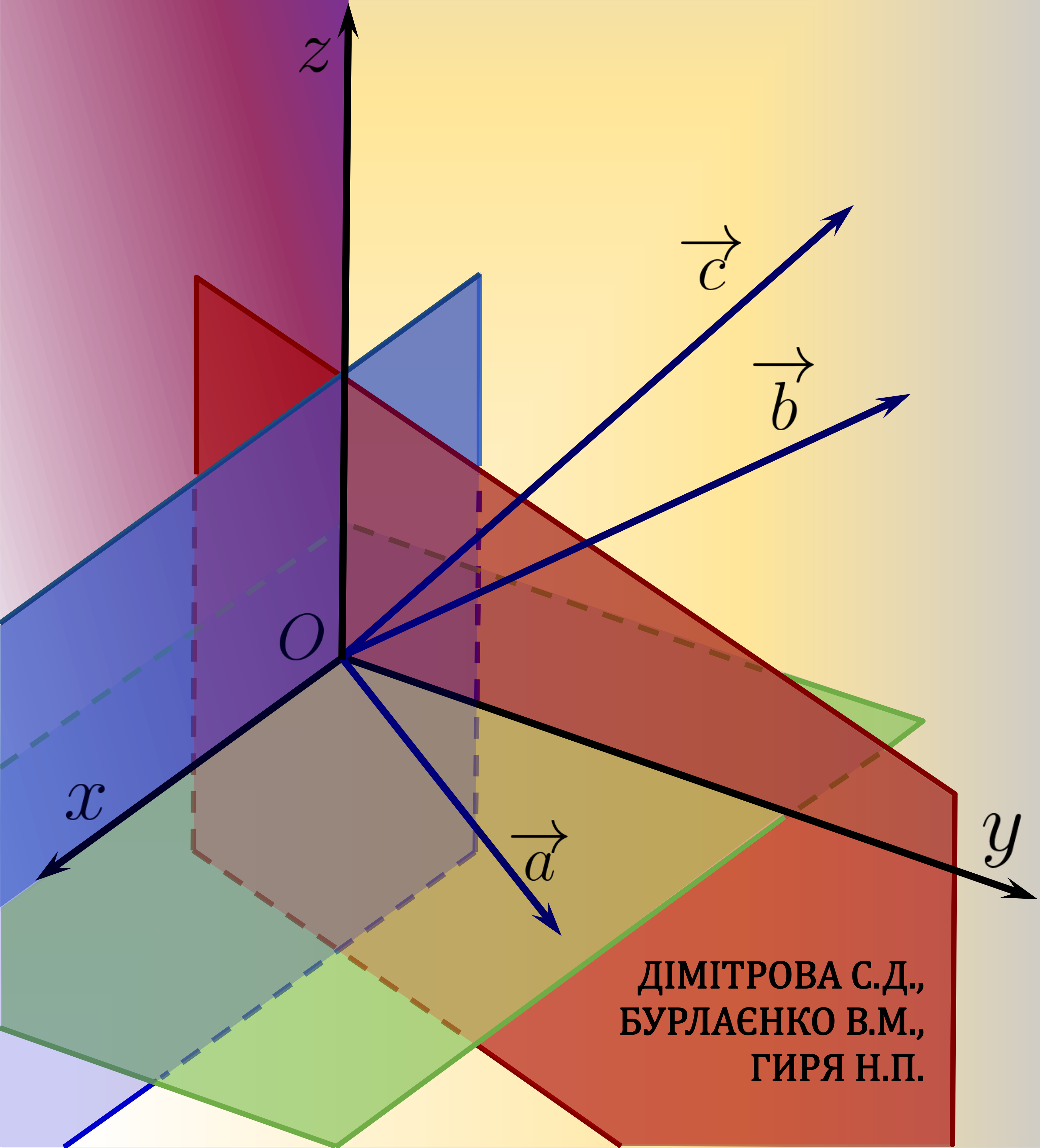
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ВЕКТОРНИМ МЕТОДОМ



ДІМІТРОВА С.Д.,
БУРЛАЄНКО В.М.,
ГИРЯ Н.П.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Дімітрова С.Д.,Бурлаєнко В.М., Гиря Н.П.

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ВЕКТОРНИМ МЕТОДОМ

Видання друге, виправлене, доповнене

Навчально-методичний посібник

Затверджено
науковою радою
НТУ «ХПІ»,
протокол № 5 від 13.10.2020р.

Харків

НТУ «ХПІ»
2020

УДК 517.2, 517.3

Рецензенти: *Д.В. Бреславський*, д-р. техн. наук, професор, Національний технічний університет «ХПІ»;
Г.В. Руднєва, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Національний технічний університет «ХПІ».

Дімітрова С.Д., Бурлаєнко В.М., Гиря Н.П. Розв'язання задач аналітичної геометрії векторним методом. Видання друге, виправлене, доповнене: навчально-методичний посібник – Харків: НТУ «ХПІ», 2020 – 50 с. – Укр. мовою.

У навчальному посібнику наведено застосування методів векторної алгебри на прикладах розв'язання геометричних задач. Посібник складений у вигляді практикуму з використання техніки векторних перетворень. Кожна задача сформульована та має розв'язок у вигляді, який не залежить від системи координат. Деякі приклади мають також координатну форму знаходження розв'язку. Посібник містить понад 30 вправ та понад 40 завдань для самостійної роботи з підказками та відповідями.

Посібник призначений щодо самостійної роботи студентів інженерних спеціальностей.

In the textbook, an application of the method of vector algebra to solving analytical geometry problems is presented. Written as a mathematics practicum, the textbook demonstrates the use of vectors in the context of analytical geometry. Each task is formulated and solved independently of the coordinate system used, while solutions using coordinate descriptions are presented in some cases as well. The textbook features over 30 detailed exercises and over 40 self-controlling tasks, where students can work through a series of hints or choose to see the entire solution at once.

The textbook is intended for undergraduate and beginning graduate students of engineering specialties.

Іл. 20. Табл. 3. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 517.2, 517.3

ВСТУП

Характерною особливістю геометричного міркування під час вирішення того чи іншого завдання є застосування допоміжних елементів – точок, ліній, поверхонь. Саме від вдалого вибору цих елементів залежить успіх міркування. Штучність геометричних доводів підкреслена філософом XIX століття Шопенгауер: «Згода читача з остаточним висновком не виникає в результаті вивчення фігури і зіставлення її властивостей з раніше відомими, а вловлюється за допомогою хитромудро простягнутих ниток – ліній».

Аналітична геометрія, основа якої покладена в XVI ст. Декартом, внесла дух систематизації алгебри в рішення геометричних задач. За допомогою методу координат з'явилася можливість адекватно відображати геометричні факти числовими співвідношеннями та виключити довільний вибір допоміжних елементів.

Разом з тим, вже перші кроки аналітичної геометрії виявили поряд з сильною стороною методу й деякі слабкі його риси:

1. простому геометричному факту не завжди відповідають прості координатні формули;
2. в той час, як початкові та кінцеві формули координатного запису мають геометричний зміст, він може зникнути в проміжних викладках;
3. до досліджуваних об'єктів завжди приєднується додаткова фігура – координатний тригранник.

Таким чином, рівняння є адекватним зображенням не кривої, а більш складного образу, що складається з кривої та координатних осей. Останні в геометрії відіграють таку ж саму ж роль, що й риштування при спорудженні будівлі: незамінний допоміжний засіб, але воно *а*) закриває від очей картину будівлі, що будується, *б*) вимагає зусиль для свого зняття після закінчення будівництва.

Цими особливостями координатного методу частково зумовлені спроби геометричної думки створити нове «геометричне числення». У 1679 р

Лейбніц в листі до Гюйгенса писав: «... Я думаю, що ми маємо потребу ще в одному численні, власне геометричному або лінійному, яке давало б нам можливість висловлювати безпосередньо положення, подібно до того, як за допомогою алгебри висловлюють величину». В якості основного елемента нового обчислення була прийнята *точка*. Основними рисами нового геометричного обчислення встановлено такі положення: *а*) буквені співвідношення між самими геометричними образами, прийнятими в якості елементарних, а не між числами, прикріпленими до цих образів (як в аналітичній геометрії); *б*) рівняння геометричної фігури розглядається як геометричне місце елементарних геометричних образів – точок (НЕ чисел).

Аж до початку XIX ст. задум Лейбніца залишався без подальшого розвитку. І тільки з бурхливим розвитком в середині XIX ст. фундаментальної науки, перш за все теоретичної фізики, нове «точкове числення» було сприйнято широкими колами математиків та фізиків. Надалі за геометричний образ приймається *пара точок*, заданих у певному порядку. Звідси формується поняття вектора і самостійне *векторне* числення, в якому всі операції проводять над об'єктами двох категорій: дійсними числами або скалярами і векторами.

Операції векторного числення складають потужний математичний апарат, який широко застосовується при вирішенні різних питань фізики, механіки, гідродинаміки, електротехніки, тощо. Одна з головних переваг векторного обчислення полягає в тому, що рівняння, які описують те чи інше фізичне явище, можна формулювати безвідносно до координатних систем. А потім при вирішенні завдання скористатися зручною системою координат, коли векторні рівняння перетворюються до найбільш простої форми еквівалентних скалярних рівнянь. У зв'язку з великим значенням цієї дисципліни в математичній освіті інженера є необхідним викладання її понять і методів для студентів інженерних спеціальностей у курсі вищої математики.

Цей посібник має за мету допомогти читачеві опанувати апарат векторного обчислення. Застосування методів векторного числення в посібнику показано на прикладах використання векторної алгебри в питаннях геометрії. Передбачається знайомство читача з основами та найпростішими формулами аналітичної геометрії, з основними поняттями векторної алгебри, що дозволить звести вирішення завдань до доступних для розуміння читача операцій. Відсутній теоретичний матеріал із зазначених курсів можна отримати з відповідних спеціальних джерел, наприклад [1-4].

1. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА

Назва «вектор» походить від латинського слова *vehere* – перевозити, переміщувати. Саме *напрямок* служить одним з визначальних елементів «векторних величин», і в силу цього вони можуть бути зображені векторами. Такими є: переміщення точки з одного положення в інше, сила, швидкість точки при криволінійному русі, напруженість електричного або магнітного поля та ін.

Означення 1.1. Вектором називається геометричний образ, який визначається побудовою: від даної точки A («початок вектора») в даному напрямку відкладається відрізок AB, довжиною дорівнює величині s «модуль вектора», що призводить однозначним чином до точки B («кінець вектора») и позначається $\overrightarrow{AB}$, його модуль – $\left|\overrightarrow{AB}\right| \equiv s$. Коротко: вектор це напрямлений відрізок.

Разом з тим, наявність чисельного значення і напрямку в просторі у деякого фізичного об'єкта недостатньо для віднесення його до групи векторних величин. Наявність зазначених ознак необхідно, але не достатньо для визначення об'єктів векторними величинами. Суть цього ілюструє наступний приклад.

Потік автомобілів на конкретній дорозі в одиницю часу є об'єктом, для характеристики якого потрібно вказати величину та напрямок. Припустимо цей об'єкт є векторним (означення 1.1) і розглянемо перехрестя трьох доріг, яке показано на малюнку 1, де зливаються два потоки автомобілів по 500 машин на годину кожен.

Якщо складати потоки як вектори, то замість очевидного результату 1000 маш/год, отримаємо за правилом паралелограма вочевидь неправильний результат $500\sqrt{2} \approx 700$ маш/год. Таким чином, хоча потік і характеризується числовим значенням і напрямком, але НЕ є вектором.

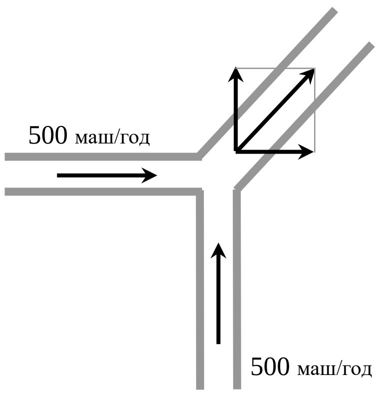


Рисунок 1

Іншим прикладом не векторних об'єктів може служити поворот твердого тіла навколо осі. Припустимо, що поворот можна уявити відрізком, рівним за величиною куту повороту і спрямованим по осі обертання, наприклад, в сторону, звідки поворот видно проти ходу годинникової стрілки. Розглянемо на малюнку 2 сферу, яка повернулася навколо осі Oy на кут α_1 так, що деяка точка сфери з положення A_1 перемістилася в положення A_2. Цей поворот зобразимо у вигляді спрямованого відрізка $\boldsymbol{\alpha}_1$. Другий поворот сфера здійснює навколо осі Oz на кут α_2 так, що точка перейде з положення A_2 у A_3. Йому відповідає спрямований відрізок $\boldsymbol{\alpha}_2$. Тоді поворот сфери, що переводить точку з положення A_1 у A_3, з одного боку, повинен бути сумою відрізків $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$, а з іншого – зображений відрізком $\boldsymbol{\alpha}_3$, перпендикулярним до площини A_1OA_3. Оскільки відрізок $\boldsymbol{\alpha}_3$ не лежить в площині zOy, цей відрізок не може бути сумою $\boldsymbol{\alpha}_1$ та $\boldsymbol{\alpha}_2$. Даний приклад особливо наочний при $\alpha_1 = \alpha_1 = \pi/2$.

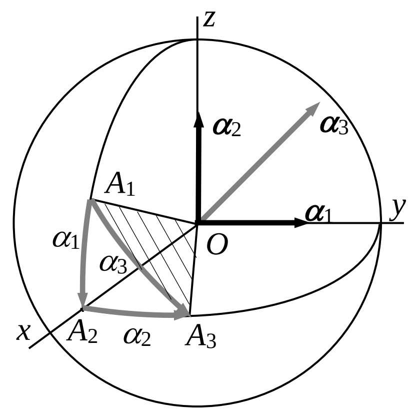


Рисунок 2

Величини, які є векторами, мають ще ряд властивостей, які визначаються правилами дій *векторної алгебри*: множення на число, додавання, віднімання, скалярний, векторний і комбіновані добутки [1-4]. З іншого боку безліч векторів допускає подальшу диференціацію. У деяких фізичних і технічних додатках розрізняють вектори *полярні* та *аксіальні* (*псевдовектори*). До перших відносять, наприклад, вектори швидкості, сили, напруженості електричного поля, до других – вектори моменту сили, напруженості магнітного поля й ін. Крім того, в механіці вектори поділяються на *вільні*, *ковзаючі* і *закріплені*, в залежності від ролі точки прикладання в них [2].

З точки зору математики таке розмаїття основних об'єктів представляє значні незручності. Тому в основу векторного обчислення покладено поняття вільного вектору. Правила дій векторної алгебри однакові для всіх вільних векторів незалежно від їх природи. Встановлені для вільних векторів алгебраїчні дії поширюються також на закріплені і ковзаючі вектори, що мають загальну точку прикладання.

Найпростішим прикладом вільного вектору є *радіус-вектор* $\boldsymbol{r}$ точки. Цей вектор, що йде від обраного *полюса* (довільна, але цілком визначена точка простору) до даної точці простору визначає її положення. Радіус-вектор, не пов'язаний ні з якою системою координат і не залежить від неї. Введення вектору точки дозволяє звести дослідження геометричних властивостей ліній, поверхонь і тіл до вивчення алгебраїчних дій над множиною векторів, що відповідають точкам, які утворюють досліджувані геометричні об'єкти.

Відзначимо, що далі за текстом, кожен вектор, незалежно від положення його початкової точки (оскільки вектори вільні), будемо позначати однією латинською літерою жирного шрифту.

Як відомо, в аналітичній геометрії положення точки геометричного об'єкта визначають числами – координатами. Між двома методами – векторним і координатним існує зв'язок, який встановлюється введенням поняття координат вектору.

Означення 1.2. Базисом на прямій називається будь-який ненульовий вектор, що належить цій прямій.

Базисом на площині називається будь-яка пара неколінеарних векторів, що належать цій площині $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2\}$.

Базисом в просторі називається будь-які три некомпланарних вектори $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$.

Означення 1.3. Базис називається ортогональним, якщо вектори, які його утворюють, попарно ортогональні.

Означення 1.4. Ортогональний базис називається ортонормованим, якщо вектори, які його утворюють, мають одиничну довжину.

Означення 1.5. Система координат, породжена ортонормованим $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ базисом називається прямокутною декартовою системою координат.

Вибравши в просторі базис, що складається з векторів $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, заданих в певному порядку, можна довільний вектор **a** розкласти за цими векторами і притому однозначно:

$$\boldsymbol{a} = X\,\boldsymbol{e}_1 + Y\,\boldsymbol{e}_2 + Z\,\boldsymbol{e}_3$$

Означення 1.6. Коефіцієнти розкладання X, Y, Z називаються координатами (або компонентами) вектора $\boldsymbol{a}$ в базисі $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3\}$.

Якщо крім базису, обрано полюс O, то положення будь-якої точки M в просторі може бути визначено як радіус-вектором $\boldsymbol{r}$, так і трьома числами x, y і z, що з'являються в якості коефіцієнтів при розкладанні за базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3\}$:

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3$$

Коротко зупинимося на основних правилах дій векторної алгебри, які використовуються далі за текстом посібника.

Означення 1.7. Сумою векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, … називається вектор $\boldsymbol{N}$, який замикає многокутник, побудований на векторах, які є доданками.

Окремим випадком правила складання двох неколінеарних векторів є *правило паралелограма*: сума таких векторів зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, що додаються. Для трьох некомпланарних векторів має місце *правило паралелепіпеда*: сума таких трьох векторів зображується діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах, що додаються.

Означення 1.8. Під різницею векторів розуміють дію віднімання від вектора $\boldsymbol{a}$ (зменшуване) вектор $\boldsymbol{b}$ (від'ємник), яка полягає в тому, щоб знайти такий вектор $\boldsymbol{c}$, який при додаванні до вектора - від'ємника, дасть вектор-зменшуване.

Означення 1.9. Скалярним добутком двох векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів векторів на косинус кута між ними $\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right)$.

Або добуток модуля одного вектора і проекції іншого вектора на напрямок першого

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,Пр_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,Пр_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$$

Тут визначено,

$$Пр_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right) \text{ і } Пр_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right).$$

З визначення скалярного добутку випливають його властивості:

1. Якщо вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ відмінні від нуля, то скалярний добуток $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ дорівнює нулю в тому і тільки тому випадку, коли вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ взаємно перпендикулярні (ортогональні), вірно й обернене твердження, тобто

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$$

2. Якщо скалярний добуток $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ відмінний від нуля, він має додатне або від'ємне значення в залежності від того, чи утворюють вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ гострий або тупий кут.

3. Якщо один з векторів, які перемножуються – *одиничний*, то скалярний

добуток дорівнює проекції іншого вектора на напрямок першого.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\textit{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}, \text{ якщо } |\boldsymbol{a}|=1 \text{ або } \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\textit{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}, \text{ якщо } |\boldsymbol{b}|=1.$$

4. Скалярний добуток двох *одиничних* векторів дорівнює косинусу кута між ними.

5. Скалярний добуток вектора самого на себе називається *скалярним квадратом* і дорівнює квадрату його довжини:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2.$$

У прямокутній системі координат (з базисними взаємно перпендикулярними ортами ***i***, ***j***, ***k***) скалярний добуток двох векторів дорівнює

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Означення 1.10. Векторним добутком двох векторів ***a*** і ***b*** називається вектор **c**, напрямлений перпендикулярно до площини векторів-співмножників в ту сторону, звідки поворот від першого співмножника до другого на менший кут видно проти ходу годинникової стрілки, і дорівнює добутку модулів векторів на синус кута між ними $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right)$.

Довжина вектора ***c*** чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудовано на векторах ***a*** і ***b***.

Використовуючи означення векторного добутку можна сформулювати необхідну і достатню умову колінеарності двох векторів ***a*** і ***b***

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}.$$

Зокрема, векторний добуток вектора ***a*** на самого себе дорівнює нулю,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=0.$$

Вираз векторного добутку через компоненти векторів, заданих в прямокутній декартовій системі координат має вигляд

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=$$

$$=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(x_1z_2-x_2z_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}.$$

Цей вислів зручно записати у вигляді символьного визначника:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Відзначимо, що скалярний і векторний добутки тісно пов'язані з багатьма фізичними поняттями.

Робота сили $\boldsymbol{F}$ (прямолінійний рух) при переміщенні її точки прикладання на вектор $\boldsymbol{s}$ дорівнює

$$A = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

Момент сили $\boldsymbol{F}$ відносно деякої точки O дорівнює

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}$, де $\boldsymbol{r}$ – вектор від точки O до початку вектора $\boldsymbol{F}$.

Означення 1.11. Змішаним добутком називається число, отримане від векторно-скалярного добутку трьох векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, і позначається $\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

Абсолютна величина змішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах

$$|\boldsymbol{abc}|=V .$$

Звідси, необхідною і достатньою умовою компланарності векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ (їх розташування в одній площині) є рівність нулю їх змішаного добутку

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0 .$$

Використовуючи уявлення скалярного і векторного добутків в прямокутній декартовій системі координат, отримаємо зручну формулу для обчислення змішаного добутку через координати трьох відомих векторів

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Означення 1.12. Подвійним векторним добутком трьох векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ називається вектор, який відповідає двом послідовним векторним множенням, тобто маємо вирази наступної форми $[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}]\neq[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]]$.

Означення 1.13. *Компонентою* (ортогональною) вектора $\overrightarrow{AB}$ *за прямою* називається новий вектор, який лежить на цій прямій і має початком проекцію (на пряму) початку вектора $\overrightarrow{AB}$, а кінцем – проекцію його кінця. Замість *компоненти* говорять ще «*геометрична проєкція*», тоді проекцію вектора називають «алгебраїчною» або «числовою».

Означення 1.14. Компонентою (ортогональною) вектора $\overrightarrow{AB}$ *в площині* називається новий вектор, який лежить в цій площині і має початком проекцію (на площину) початку вектора $\overrightarrow{AB}$, а кінцем – проекцію його кінця.

Таким чином, будь-який вектор дорівнює сумі своїх компонент, взятих в який-небудь площині і за перпендикулярною до неї прямою. Алгебраїчна форма компонент вектора $\boldsymbol{a}$ може бути записана через одиничний вектор $\boldsymbol{k}$. Так компонента вектора $\boldsymbol{a}$ за прямою PQ, паралельною вектору $\boldsymbol{k}$, дорівнює

$$КОМП_{PQ}\,\boldsymbol{a} = ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k})$$

Компонента вектора $\boldsymbol{a}$ в площині π, перпендикулярній вектору $\boldsymbol{k}$, дорівнює

$$КОМП_{\pi}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) \text{ або } КОМП_{\pi}\,\boldsymbol{a} = [[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{k}],$$

тобто $[[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{a} - ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k})$

Для довільних векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ формули розкладання подвійного векторного добутку набувають вигляду:

$$[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \text{ и } [\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Ці результати можна об'єднати в наступному словесному формулюванні: подвійний векторний добуток дорівнює середньому (за місцем розташування) вектору, помноженому на скалярний добуток двох крайніх, мінус другий вектор внутрішньої дужки, помножений на скалярний добуток двох інших.

2. ВЕКТОРНІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Розглянемо методи опису і дослідження властивостей найпростіших геометричних об'єктів – прямої та площини – засобами векторної алгебри.

2.1. Пряма на площині

Нехай дана система координат на площині $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2\}$ і пряма L, яка проходить через точку $\boldsymbol{r}_0$ та ненульовий вектор $\boldsymbol{a}$, який лежить на L .

Означення 2.1. Вектор $\boldsymbol{a}$, що лежить на прямій, або є паралельним до неї називається напрямним вектором прямої L.

Задача 1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дану точку M_0 ($\boldsymbol{r}_0$) та паралельна даному вектору $\boldsymbol{a} \neq 0$.

Розв'язок: Розглянемо на прямий довільну точку M ($\boldsymbol{r}$) (рисунок 3), тоді вектор $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ буде колінеарним до вектора $\boldsymbol{a}$. Якщо ж точка M лежить поза даною прямою, то вектор $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ не може бути колінеарним до $\boldsymbol{a}$.

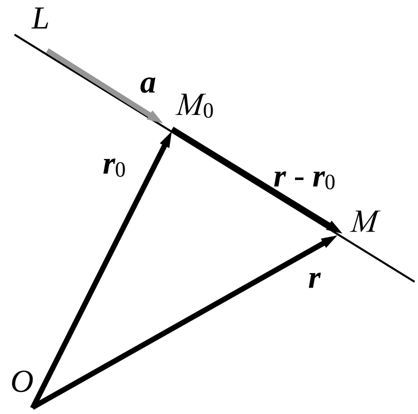


Рисунок 3

Записуючи умову колінеарності у вигляді $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \lambda\, \boldsymbol{a}$, де λ – числовий множник, що залежить від положення точки M, отримаємо необхідне рівняння прямої в параметричній формі

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a} \qquad (1)$$

Параметр λ змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, тоді кінець вектора $\boldsymbol{r}$ описує всю пряму L.

Задача 2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві різні дані точки M_1 ($\boldsymbol{r}_1$) і M_2 ($\boldsymbol{r}_2$).

Розв'язок: Де б не була взята на прямій M_1M_2 довільна точка M ($\boldsymbol{r}$), завжди вектори $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ та $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ колінеарні. Якщо ж точка M лежить поза цією прямою, то вектори НЕ колінеарні. Отже, необхідне рівняння запишемо у вигляді умови колінеарності векторів:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = \lambda\, (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1),$$

де λ – параметр, або

$$\boldsymbol{r} = (1 - \lambda)\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2 \tag{2}$$

Зауважимо, що в обох задачах залишилося відкритим питання про розмірність розглянутого простору. Відмінності виявляються тільки при переході до координатної форми рівнянь.

Виберемо в площині прямокутну декартову систему координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, тоді

$\boldsymbol{r} = (x, y)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ і $\boldsymbol{a} = (l, m)$

Тоді рівняння (1) заміниться системою параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \end{cases} \tag{3_1}$$

Виключаючи параметр λ, отримаємо координатне рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{3_2}$$

Аналогічно, рівняння (2) рівносильне двом координатним параметричним рівнянням або одному координатному:

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \end{cases} \text{ і } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Для системи декартових координат в просторі $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ покладемо

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ та $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$,

тоді переходимо в рівнянні (1) до форми

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \text{ та } \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

а в рівнянні (2) до наступного вигляду:

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases} \text{ та } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Задача 3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дану точку M_0 ($\boldsymbol{r}_0$) перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\boldsymbol{n}$.

Розв'язок: За напрямний вектор даної прямої L приймаємо вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, де $\boldsymbol{r}$ – довільна точка цієї прямої (рисунок 4). З умови ортогональності векторів $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{a}$, отримаємо

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0 \text{ або } (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_0) \tag{4}$$

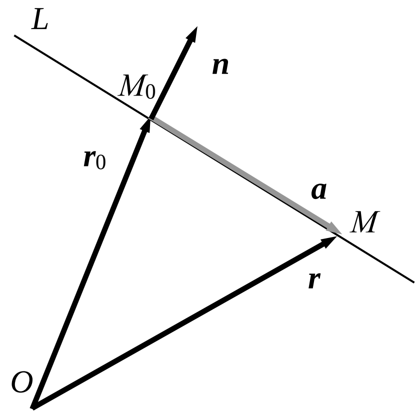


Рисунок 4

У прямокутній декартовій системі координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ векторне рівняння прямої набуває вигляду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

де $\boldsymbol{n} = \{A, B\}$ (5_1)

або

$$Ax + By + C = 0, \text{ де } C = -Ax_0 - By_0 \tag{5$_2$}$$

Означення 2.2. Вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B\}$ називається нормальним вектором прямої L.

Задача 4. На площині $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2\}$ задана пряма L рівнянням $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$. Знайти відстань від точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до цієї прямої.

Розв'язок: За відстань від точки M_1 до прямої L приймаємо довжину відрізка MM_1 (рисунок 5) ортогональної проекції точки M_1 на пряму L. Введемо на відрізку MM_1 вектор, він є колінеарним до нормального вектора $\boldsymbol{n}$, тоді $\overrightarrow{MM_1} = \lambda\boldsymbol{n}$ або $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda\,\boldsymbol{n}$, тобто

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\,\boldsymbol{n}.$$

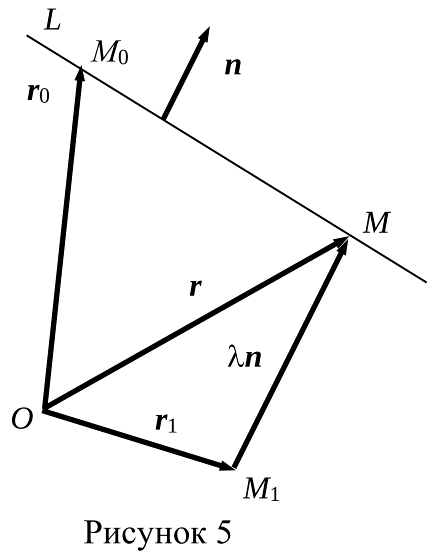


Рисунок 5

Точка M належить прямій, тоді виконується рівність

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1 + \lambda\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

Звідки

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{n}|^2}.$$

Підставляючи значення параметра λ у вираз для вектора $\overrightarrow{MM_1}$, одержимо

$$\overrightarrow{MM_1} = -(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}, \text{ тоді } |\overrightarrow{MM_1}| = |(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|})| \tag{6}$$

Координатна форма (6) у системі координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$:

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7}$$

2.2. Площина у просторі

Векторний вигляд рівнянь, які описують геометричне місце точок, однаковий для точок на площині або в просторі, наприклад рівняння (2). Взагалі, щодо рівняння, яке зв'язує змінний вектор $\boldsymbol{r}$ зі сталими величинами, говорять, що *рівняння належить даній поверхні* або *поверхня виражається цим рівнянням*, якщо останнє задовольняє лише радіус-вектору будь-якої точки, що лежить на цій поверхні.

Задача 1. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 ($\boldsymbol{r}_0$) перпендикулярно до ненульового вектора n.

Розв'язок: (Відзначимо тут повну аналогію міркувань, що відносяться до прямої п. 2.1 завдання 4.) З умови задачі випливає, що для радіус-вектора будь-якої точки шуканої площини (рис. 6), вектори $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ та $\boldsymbol{n}$ ортогональні,

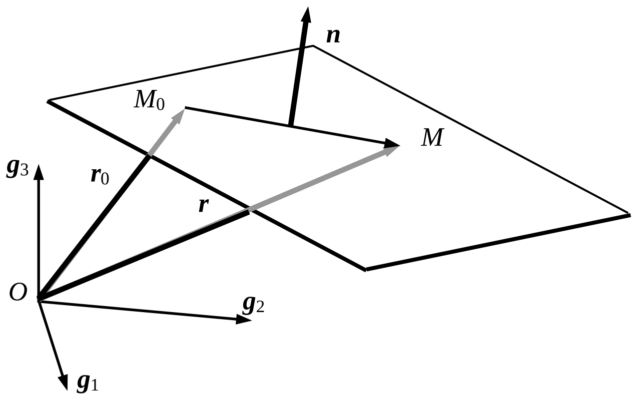


Рисунок 6

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0 \tag{8_1}$$

або

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = d, \text{ де } d = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}). \tag{8_2}$$

У ортонормованій системі координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ умова ортогональності, яка відповідає рівнянню площини (8_1), набуває вигляду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

або

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0, \text{ де } D = -\,(A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0\,). \qquad (9)$$

Означення 2.3. Вектор $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ називається нормальним вектором площини.

До *нормального рівняння* площини приходимо, розв'язуючи таку задачу:

Задача 2. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ скласти рівняння площини за відомою відстанню $p \geq 0$ площини від полюса, яка проходить перпендикулярно до одиничного вектора $\boldsymbol{n}^0$ (напрямленого при $p > 0$ від полюса до площини).

Розв'язок: Нехай OP – перпендикуляр, опущений з полюса O на площину (рисунок 7). Для будь-якої точки $M(\boldsymbol{r}\,)$, що належить площині, маємо, $Пр_{\boldsymbol{n}^0}\overrightarrow{OM} = OP = p$, тобто опущений з полюса O на площину (малюнок 7). Для будь-якої точки M (r), що належить площині, маємо $Пр_{\boldsymbol{n}^0}\overrightarrow{OM} = OP = p$, тобто

$$\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}^0 - p = 0 \ (|\boldsymbol{n}^0| = 1, p \geq 0) \qquad (10)$$

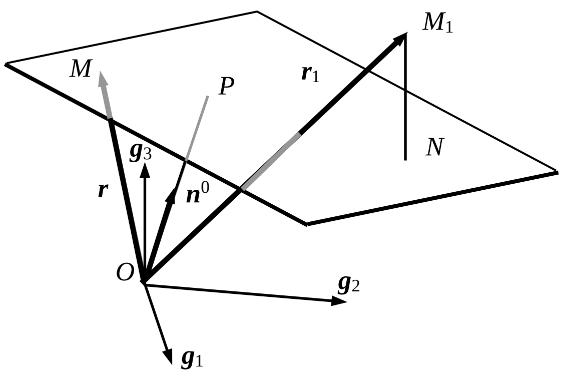


Рисунок 7

Це і є шукане рівняння.

Переходячи до координатної форми в системі координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, де проєкціями одиничного вектора є напрямні косинуси кутів α, β, γ, отримуємо з рівняння (10) наступну формулу:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (11)$$

У просторі будь-яка поверхня може бути записана параметричним рівнянням вигляду $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\,(u, v)$. Тут поточні координати точки поверхні (площини) задаються як функції незалежних змінних (параметрів) u і v. Функція $\boldsymbol{F}$ – це функція нової природи: кожній парі скалярних аргументів вона ставить у відповідність певне значення векторної змінної $\boldsymbol{r}$.

Задача 3. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ скласти рівняння площини S, яка проходить через дану точку M_0 $(\boldsymbol{r}_0)$ та паралельна до кожного з двох (неколінеарних) векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$.

Розв'язок: Нехай M ($\boldsymbol{r}$) – довільна точка площини S, тоді вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ будуть компланарними, в цьому можна переконатися, якщо перенести вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ в точку M_0, як на рисунку 8. Відзначимо, що в іншу сторону: компланарності трьох векторів $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ достатньо для того, щоб точка M належала площині S. Таким чином, рівняння площини отримаємо записуючи умову компланарності векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \lambda\, \boldsymbol{a} + \mu\, \boldsymbol{b}$$

або

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a} + \mu\, \boldsymbol{b} \qquad (12)$$

Задаючи λ і μ незалежно один від одного довільними значеннями від $-\infty$ до $+\infty$, отримаємо всі точки площині.

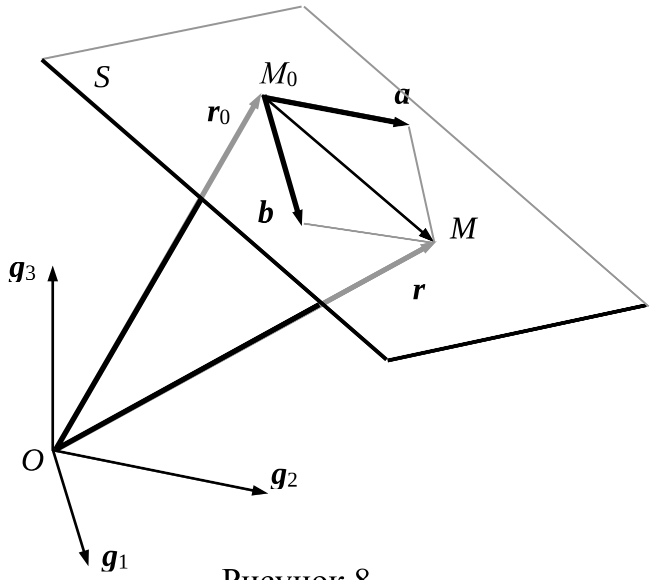


Рисунок 8

Інший спосіб вирішення цього завдання передбачає запис умови компланарності трьох векторів не в афінній формі (12), а через їх змішаний добуток:

$$(\, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\,)\, \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b} = 0 \qquad (13)$$

Бажаючи скласти непараметричне рівняння площини в координатній формі, покладемо в системі координат *{O, e_1, e_2, e_3}*

$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, $\boldsymbol{a} = \{l, m, n\}$ і $\boldsymbol{b} = \{l_1, m_1, n_1\}$

скористаємося умовою компланарності (13) у формі:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l & l_1 \\ y - y_0 & m & m_1 \\ z - z_0 & n & n_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

Задача 4. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ скласти рівняння площини S, яка проходить через дві дані точки M_1 ($\boldsymbol{r}_1$), M_2 ($\boldsymbol{r}_2$) та паралельна до вектор $\boldsymbol{a}$.

Розв'язок: Позначаючи через M ($\boldsymbol{r}$) довільну точку площини S, запишемо умову компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \mu\,\boldsymbol{a} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \mu\,\boldsymbol{a} \tag{15}$$

Або використовуючи змішаний добуток:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a} = 0 \tag{16}$$

Відзначимо, що вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ відіграє роль вектора $\boldsymbol{b}$ попередньої задачі.

Координатна форма рівнянь (15) або (16) (без пояснення позначень) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & l \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & m \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & n \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

Задача 5. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ скласти рівняння площини S, яка проходить через три дані точки M_1 ($\boldsymbol{r}_1$), M_2 ($\boldsymbol{r}_2$) і M_3 ($\boldsymbol{r}_3$).

Розв'язок: Позначаючи через M ($\boldsymbol{r}$) довільну точку площини S (рисунок 9), запишемо умову компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$, знаходимо

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \mu(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) \tag{18}$$

Через змішаний добуток:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0$$

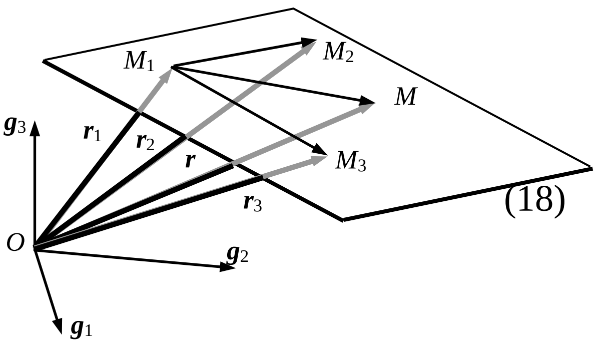


Рисунок 9

або

$$\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}_2\,\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}_3\,\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{r}_2\,\boldsymbol{r}_3, \tag{19}$$

а в прямокутній декартовій системі координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Задача 6. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ знайти відстань від точки M_1 ($\boldsymbol{r}_1$) до площини $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0$.

Розв'язок: Нехай M є ортогональною проекцією точки M_1

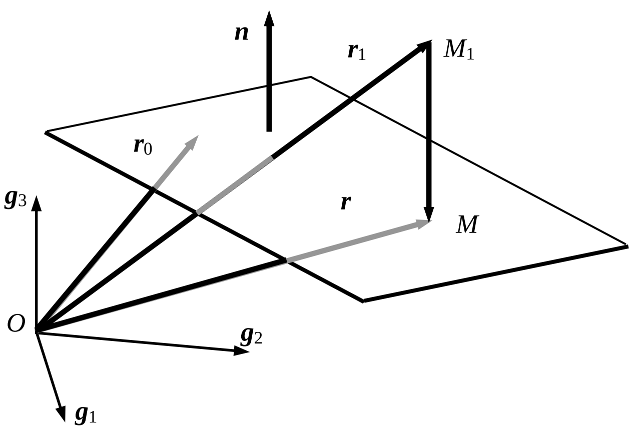


Рисунок 10

на дану площину (рисунок 10), тоді вектор $\overrightarrow{MM_1} = \lambda \boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{n}$.

Точка M належить даній площині, тому має місце наступне співвідношення:

$$(\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}_0 , \boldsymbol{n}) = 0$$

і, отже,

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{n}|^2}.$$

Таким чином, для визначення шуканої відстані, отримаємо:

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \left|\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right)\right| \tag{21}$$

В координатній формі рівняння (21) має вигляд:

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{22}$$

2.3. Пряма у просторі

Пряма у просторі може бути задана як *лінія перетину площин* (8_2):

$$(\boldsymbol{r} , \boldsymbol{n}_1) = d_1 \text{ і } (\boldsymbol{r} , \boldsymbol{n}_2) = d_2,$$

де $\boldsymbol{n}_1$ і $\boldsymbol{n}_2$ – неколінеарні нормальні вектори цих площин, а d_1 та d_2 – числа.

Або ж, якщо відомі координати деякої точки M_0 ($\boldsymbol{r}_0$), через яку проходить дана пряма, то радіус-вектор цієї точки задовольняє системі векторних рівнянь:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_2) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

це відповідає координатній формі:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}. \tag{24}$$

Для $\boldsymbol{r}_0$-радіус-вектора точки, через яку проходить пряма і вектор $\boldsymbol{a}$, до якого вона паралельна, рівняння прямої в просторі відповідає раніше розглянутому векторному рівнянню прямої з параметром (1). Координатна форма рівняння (1) відповідає *параметричним* і *канонічним* рівнянням розглянутим раніше в п. 2.1.

Запишемо іншу, вільну від параметра, векторну форму рівняння прямої в просторі. З умови колінеарності векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, де $\boldsymbol{r}$ -радіус-вектор довільної точки прямої, маємо:

$$[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\,] = \boldsymbol{o},\ (\boldsymbol{o} \equiv 0) \tag{25_1}$$

або ж

$$[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}\,] = \boldsymbol{b}, \tag{25_2}$$

де $\boldsymbol{b} = [\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_0\,]$, причому $(\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,) = 0$.

Означення 2.4. Вектор $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$, що збігається з прямою або паралельний до неї, називається напрямним вектором прямої.

В системі прямокутних декартових координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ дане рівняння прямої в просторі приймає наступний вигляд:

$$\det\begin{Vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \boldsymbol{b}, \text{ або } \begin{cases} a_y z - a_z y = b_x \\ a_z x - a_x z = b_y \\ a_x y - a_y x = b_z \end{cases} \tag{25_3}$$

Відзначимо, що в останній системі скалярних умов тільки два рівняння з трьох є лінійно незалежними, при цьому числа a_x, a_y і a_z не дорівнюють одночасно нулю й, крім того, справедливі співвідношення:

$$\begin{cases} b_x = a_y z_0 - a_z y_0 \\ b_y = a_z x_0 - a_x z_0 \\ b_z = a_x y_0 - a_y x_0 \end{cases}.$$

Задача 1. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ скласти рівняння прямої, вільне від параметра, за двома точками M_1 ($\boldsymbol{r}_1$) та M_2 ($\boldsymbol{r}_2$), які не збігаються .

Розв'язок: Скористаємося умовою колінеарності двох векторів $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$, показаних на рисунку 11. Аналогічно до рівняння (25_1), умову колінеарності векторів запишемо у вигляді

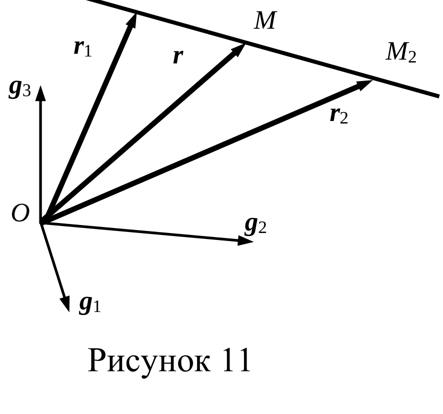


Рисунок 11

$$[\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\,,\,\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\,]=\boldsymbol{o},\ (\boldsymbol{o}\equiv 0) \qquad (26_1)$$

або

$$[\,\boldsymbol{r}\,,\,\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\,]=[\,\boldsymbol{r}_1\,,\,\boldsymbol{r}_2\,], \qquad (26_2)$$

що відповідає рівнянню шуканої прямої.

Задача 2. В системі координат $\{O, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ скласти рівняння прямої за заданою точкою M_0 ($\boldsymbol{r}_0$) і двома перпендикулярними до неї векторами $\boldsymbol{n}_1$ і $\boldsymbol{n}_2$.

Розв'язок: Якщо задані два вектори, перпендикулярні до прямої (рисунок 12), то її напрям цілком визначено, оскільки пряма паралельна до вектора $[\,\boldsymbol{n}_1\,,\,\boldsymbol{n}_2\,]$. В силу цього, рівняння прямої можемо записати в одній з форм

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\,[\boldsymbol{n}_1\,,\,\boldsymbol{n}_2\,], \qquad (27_1)$$

$$[\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\,,[\boldsymbol{n}_1\,,\,\boldsymbol{n}_2\,]=\boldsymbol{o} \qquad (27_2)$$

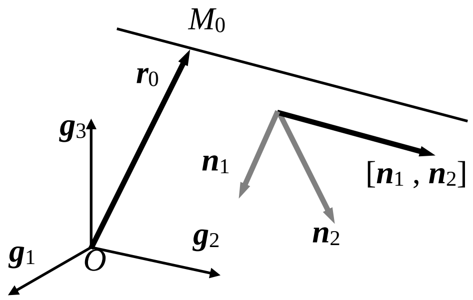


Рисунок 12

Вище показано, що рівняння прямої в просторі можна представити рівнянням (25_2). Покажемо обернене, будь-яке рівняння типу (25_2), де вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ підпорядковані єдиній умові перпендикулярності, представляє деяку пряму.

Спочатку розв'яжемо векторне рівняння $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{x}$ – шуканий вектор, $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ – дані взаємно перпендикулярні вектори. Помножимо обидві частини рівняння векторно на вектор $\boldsymbol{a}$, отримаємо

$$[\,\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\,]] = [\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,].$$

Тоді за формулою подвійного векторного добутку маємо,

$$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{x}-(\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\,)\,\boldsymbol{a}=[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,],\ \text{де}\ \boldsymbol{a}^2=a^2,\ \text{тобто}\ a^2\boldsymbol{x}=[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,]+(\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\,)\,\boldsymbol{a}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]+\frac{1}{a^2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\ \text{ або }\ \boldsymbol{x}=\frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]+\lambda\boldsymbol{a},\ \text{де}\ \lambda=\frac{1}{a^2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}).$$

Підставляючи знайдене значення $\boldsymbol{x}$ в початкове рівняння та беручи до уваги, що $(\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,) = 0$, отримуємо тотожність при довільному λ. Звідси випливає, що формула

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \lambda \boldsymbol{a}, \tag{28}$$

де λ – довільне, дає найбільш загальне рішення рівняння $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Задача 3. Скласти рівняння прямої, заданої вектором $\boldsymbol{a}$, який лежить на прямій, й іншим вектором $\boldsymbol{b}$, який представляє собою момент вектора $\boldsymbol{a}$ щодо обраного полюса.

Розв'язок: Радіус-вектор будь-якої точки прямої згідно з вище наведеним міркуванням буде задовольняти рівнянню (28). Тоді рівняння прямої має вигляд:

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \lambda \boldsymbol{a} \tag{29}$$

Означення 2.5. Рівняння (29) називається *плюкеровим рівнянням* прямої, а вектори a і b – плюкеровимі векторами.

Слід зауважити, що для даної прямої й при цьому виборі полюса плюкерові вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ є визначеними тільки з точністю до загального скалярного множника.

Таким чином, якщо $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ дві пари плюкерових векторів для однієї і тієї ж прямої, при одному і тому ж полюсі, то $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{b}'$.

Задача 4. За якої умови лежать в одній площині прямі (рисунок 13), задані *a*) рівнянням $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1' + \mu \boldsymbol{a}'$; *b*) плюкеровимі рівняннями $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}'] = \boldsymbol{b}'$.

Розв'язок: *a*) Для того щоб прямі лежали в одній площині, необхідно і достатньо, щоб вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ і $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1'$ були компланарними, тобто щоб мала місце рівність

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1')\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{a}' = 0 \tag{30$_1$}$$

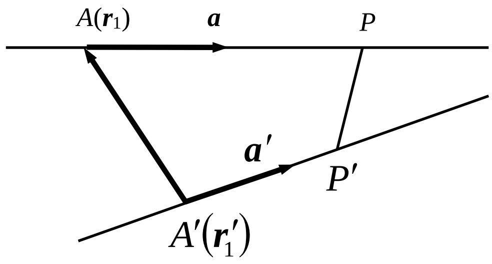


Рисунок 13

b) Розкриваючи в (30_1) дужки і замінюючи $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$ та $[\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{a}']$ відповідно через $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{b}'$, знайдемо:

$$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}' = 0 \tag{30$_2$}$$

Задача 5. Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(\boldsymbol{r}_1)$ на пряму $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \lambda \boldsymbol{a}$.

Розв'язок: *1 спосіб)*. Проведемо через точку A площину, перпендикулярну до заданої прямої (рисунок 14). Перпендикуляр AP лежить в цій площині отже, перпендикулярний до вектора $\boldsymbol{a}$ прямої. Тоді $\overrightarrow{AP}$ є компонента вектора $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, взята в цій площині. Тому

$$\overrightarrow{AP} = \left[\left[\boldsymbol{a}^0, (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\right], \boldsymbol{a}^0\right], \text{ де } \boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{a},$$

отже,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{a^2}\left[\left[\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\right], \boldsymbol{a}\right]$$

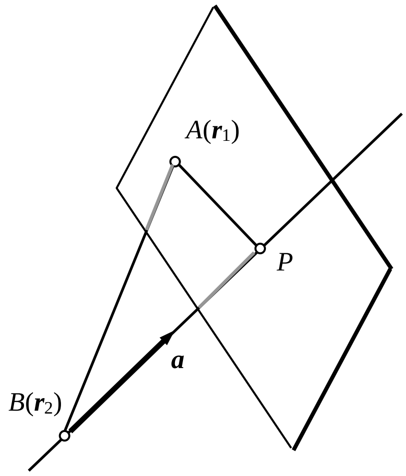


Рисунок 14

Таким чином, маємо відомий вектор, що йде в напрямку прямої AP. Тоді параметричне рівняння цієї прямої

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \mu\left[\left[\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\right], \boldsymbol{a}\right] \qquad (31_1)$$

2 спосіб). На прямій знайдемо значення параметра λ, що відповідає точці P. Так як $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA}$ або, що теж саме, $\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{r}_2 + \lambda\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}_1$. Тоді з умови перпендикулярності $\left(\overrightarrow{AP}, \boldsymbol{a}\right) = 0$ маємо,

$$\left((\boldsymbol{r}_2 + \lambda\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}_1), \boldsymbol{a}\right) = 0, \text{ звідки } \lambda = -\frac{\left((\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1), \boldsymbol{a}\right)}{a^2}, \text{ а отже,}$$

$$\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{r}_2 - \frac{\left((\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1), \boldsymbol{a}\right)}{a^2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}_1 = \frac{1}{a^2}\left\{a^2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) - \left((\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}\right)\right\}$$

Цей вираз, згідно з формулою розкладання подвійного векторного добутку, тотожний з раніше отриманими для напрямного вектора прямої AP. Тоді параметричне рівняння цієї прямої:

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{a^2}\left\{a^2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) - \left((\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}\right)\right\} \qquad (31_2)$$

Задача 6. Знайти відстань від точки $A(\boldsymbol{r}_1)$ до прямої, заданої a) параметричним рівнянням $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \lambda\boldsymbol{a}$; b) плюкеровим рівнянням $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Розв'язок: Використовуємо отриманий вище результат в *завданні 5* для вектора перпендикуляра AP, тоді

$$AP^2 = \frac{1}{a^4}\left[\left[\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\right], \boldsymbol{a}\right]^2.$$

Тут

$$[[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)],\boldsymbol{a}]^2=[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]^2\,\boldsymbol{a}^2-((\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1),\boldsymbol{a})^2=[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]^2\,a^2$$

Таким чином,

$$AP^2=\frac{1}{a^2}[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]^2\Rightarrow$$

$$AP=\frac{|[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]|}{a}. \qquad (32_1)$$

Якщо пряма задана плюкеровим рівнянням, то покладаючи у формулі (32_1) $[\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}$, знаходимо

$$AP=\frac{|\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a}]|}{a}. \qquad (32_2)$$

Нарешті, відстань від деякої точки до прямої можна знайти, скориставшись тією властивістю, що S – площа паралелограма, побудованого на парі векторів (рисунок 15), дорівнює модулю їх векторного добутку. З малюнка очевидно, що такими двома векторами є вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$. Тоді,

$$AP=\frac{S}{a}=\frac{|[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]|}{a}.$$

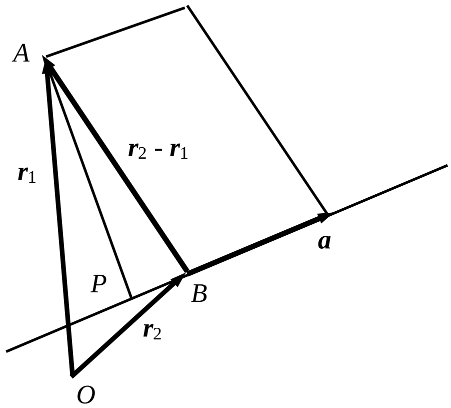


Рисунок 15

Задача 7. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, заданими *a*) рівняннями $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\,\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1'+\mu\boldsymbol{a}'$; *b*) плюкеровими рівняннями $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}']=\boldsymbol{b}'$.

Розв'язок: Завдання зводиться до відшукання довжини відрізка PP' (на малюнку 13), що є загальним перпендикуляром до обох прямих. Допускаємо спочатку, що прямі не паралельні ($[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}']\neq 0$), причому відрізок PP' перпендикулярний до кожного з векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ і, отже, паралельний до вектора $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}']$. Звідси робимо висновок, що шукана довжина дорівнює абсолютній величині проекції вектору на напрямок вектора:

$$PP'=\left|\text{Пр}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}']}(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_1)\right|=\frac{|(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}'|}{|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}']|}=\frac{|(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}'|}{\sqrt{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}']^2}}. \qquad (33_1)$$

Щоб отримати рішення для прямих, заданих плюкеровими рівняннями, досить розкрити дужки в чисельнику дробу (33_1) та виконати дію

$$\boldsymbol{r}_1'\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}' = -([\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{a}'], \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}) \text{ і } \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}' = ([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{a}') = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}'),$$

остаточно маємо

$$PP' = \frac{|(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}')|}{\sqrt{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}']^2}} \qquad (33_2)$$

У разі паралельності заданих прямих ($\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}'$), не порушуючи загальності міркувань, можемо вважати $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$. Тоді задача зводиться до відшукання відстані будь-якої точки, взятої на одній прямій, від іншої прямої, тобто до вирішеною завдання 6. Наприклад, для відстані від точки $A'(\boldsymbol{r}_1')$ до прямої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{a}$ знаходимо (32_1)

$$PP' = \frac{\sqrt{[(\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_1), \boldsymbol{a}]^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}}. \qquad (34_1)$$

Для паралельних плюкерових прямих відстань дорівнює

$$PP' = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b})^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}}. \qquad (34_2)$$

2.4. Взаємне розташування площини і прямої

Ефективність використання методів векторної алгебри при розв’язанні геометричних задач багато в чому залежить від правильного вибору уявлення геометричних умов у векторній формі.

Наприклад, для обчислення кутів, що визначають взаємне розташування прямих і площин у просторі, можна ввести рівносильні визначення через знаходження скалярних добутків відповідних нормальних і напрямних векторів.

Означення 4.1. Кутом між площинами називається кут між їх нормальними векторами.

Означення 4.2. Кутом між площиною та прямою називається кут між їх нормальним і напрямним векторами відповідно.

У таблицях нижче наведені деякі з часто вживаних форм вираження геометричних умов за допомогою векторних операцій

<table>
<tr><th colspan="2">Геометрична умова</th><th>Можлива векторна форма уявлення</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Колінеарність прямих</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}_1$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\tau\boldsymbol{a}_2$</td><td>1. Існує $\lambda\neq 0$ таке, що $\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{a}_2$
2. $\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right]=\boldsymbol{o}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{a}$ і
$\begin{cases}\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{r}\right)=d_1\\ \left(\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{r}\right)=d_2\end{cases}$</td><td>1. Існує $\lambda\neq 0$ таке, що $\boldsymbol{a}=\lambda\left[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right]$
2. $\left[\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right]\right]=\boldsymbol{o}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ортогональність прямих</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}_1$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\tau\boldsymbol{a}_2$</td><td>$\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right)=0$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{a}$ і
$\begin{cases}\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{r}\right)=d_1\\ \left(\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{r}\right)=d_2\end{cases}$</td><td>$\left(\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right]\right)=\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{n}_2=0$</td></tr>
<tr><td>Збіг прямих</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}_1$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\tau\boldsymbol{a}_2$</td><td>1. Існують $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$ такі, що $\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{a}_2$ і $\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}=\mu\boldsymbol{a}_1$
2. $\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right]=\boldsymbol{o}$ і $\left[\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02},\boldsymbol{a}_1\right]=\boldsymbol{o}$</td></tr>
<tr><td>Перетин прямих</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}_1$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\tau\boldsymbol{a}_2$</td><td>$\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right]\neq\boldsymbol{o}$ і $\left(\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}\right),\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{o}$</td></tr>
<tr><td>Мимобіжність прямих</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}_1$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\tau\boldsymbol{a}_2$</td><td>$\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right]\neq\boldsymbol{o}$ і $\left(\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}\right),\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{o}$</td></tr>
</table>

Таблиця 1. Відносна орієнтація прямих в просторі.

Геометрична умова		*Можлива векторна форма уявлення*
Колінеарність площин	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{01} + \varphi\,\boldsymbol{p}_1 + \theta\boldsymbol{q}_1$ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{01} + \varphi\,\boldsymbol{p}_2 + \theta\boldsymbol{q}_2$	1. Існує $\lambda \neq 0$ таке, що $[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1] = \lambda[\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_2]$, $(\boldsymbol{r}_{01} - \boldsymbol{r}_{02}), \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1 \neq 0$ 2. $[[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1], [\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_2]] = \boldsymbol{o}$, $(\boldsymbol{r}_{01} - \boldsymbol{r}_{02}), \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1 \neq 0$
	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \varphi\,\boldsymbol{p} + \theta\boldsymbol{q}$ и $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = d$	$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = 0$, якщо $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_0) \neq d$
Ортогональність площин	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{01} + \varphi\,\boldsymbol{p}_1 + \theta\boldsymbol{q}_1$ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{01} + \varphi\,\boldsymbol{p}_2 + \theta\boldsymbol{q}_2$	$([\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1], [\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_2]) = 0$
	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \varphi\,\boldsymbol{p} + \theta\boldsymbol{q}$ і $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = d$	1. Існує $\lambda \neq 0$ таке, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \lambda\boldsymbol{n}$ 2. $[[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}], \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{o}$
Збіг площин	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{01} + \varphi\,\boldsymbol{p}_1 + \theta\boldsymbol{q}_1$ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{01} + \varphi\,\boldsymbol{p}_2 + \theta\boldsymbol{q}_2$	1. Існує $\lambda \neq 0$ таке, що $[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1] = \lambda[\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_2]$, $(\boldsymbol{r}_{01} - \boldsymbol{r}_{02}), \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1 = 0$ 2. $[[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1], [\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_2]] = \boldsymbol{o}$, $(\boldsymbol{r}_{01} - \boldsymbol{r}_{02}), \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1 = 0$
	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \varphi\,\boldsymbol{p} + \theta\boldsymbol{q}$ і $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = d$	$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = 0$, якщо $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_0) = d$

Таблиця 2. Відносна орієнтація площин у просторі.

<table>
<tr><th colspan="2">Геометрична умова</th><th>Можлива векторна форма уявлення</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Паралельність прямої і площини</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\varphi\,\boldsymbol{p}+\theta\boldsymbol{q}$</td><td>1. Існують λ, μ, $|\lambda|+|\mu|>0$ такі, що $\boldsymbol{a}=\lambda\,\boldsymbol{p}+\mu\boldsymbol{q}$ і $(\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}),\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\neq 0$
2. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}=0$ і $(\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}),\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{a}$ і $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=d$</td><td>$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})=0$ за умови $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)\neq d$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Належність прямої до площини</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\varphi\,\boldsymbol{p}+\theta\boldsymbol{q}$</td><td>1. Існують λ, μ, $|\lambda|+|\mu|>0$ такі, що $\boldsymbol{a}=\lambda\,\boldsymbol{p}+\mu\boldsymbol{q}$ і $(\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}),\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}=0$
2. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}=0$ і $(\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}),\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}=0$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{a}$ і $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=d$</td><td>$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})=0$ за умови $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)=d$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ортогональність прямої та площини</td><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}$ і
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\varphi\,\boldsymbol{p}+\theta\boldsymbol{q}$</td><td>1. Існує $\lambda\neq 0$ таке, що $\boldsymbol{a}=\lambda[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]$
2. $[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]]=\boldsymbol{o}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{a}$ і $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=d$</td><td>1. Існує $\lambda\neq 0$ таке, що $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{n}$
2. $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{o}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases}(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{r})=d_1\\(\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{r})=d_2\end{cases},(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=d$</td><td>1. Існують λ, μ, $|\lambda|+|\mu|>0$ такі, що $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{n}_1+\mu\boldsymbol{n}_2$
2. $[\boldsymbol{n},[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2]]=\boldsymbol{o}$</td></tr>
</table>

Таблиця 3. Відносна орієнтація прямої та площини у просторі.

Наприкінці розглянемо в якості прикладів розв’язання ряду стереометричних задач методами векторної алгебри.

Задача 1. Дано площину $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=d$ і пряму $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{a}$, яка її перетинає. Знайти точку перетину прямої та площини.

Розв'язок: Зауважимо, що якщо $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})=0$, то або пряма паралельна площині (рішень немає), або пряма належить цій площині. Тому далі при вирішенні задачі будемо вважати, що виконується умова $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})\neq 0$.

Оскільки точка *K* належить заданій прямій (рисунок 16), то радіус-вектор точки повинен задовольняти рівнянню

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{a},$$

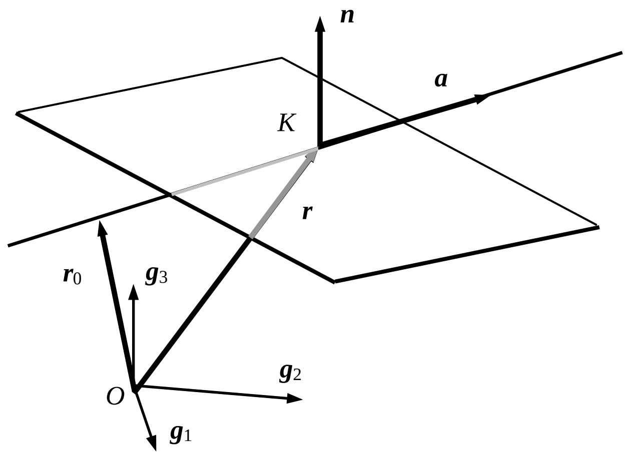


Рисунок 16

де λ – відповідне точці *K* значення параметра τ. Крім того, точка *K* є точкою заданої площини, отже має місце співвідношення $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{a})=d$. Звідки знаходимо значення параметра λ:

$$\lambda=\frac{d-(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})}.$$

Остаточно шуканий радіус-вектор точки *K*, точки перетину прямої і площини, знаходимо за формулою:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\frac{d-(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 2. Задано точку радіус-вектора $\boldsymbol{R}$ і пряму $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{a}$. Знайти відстань від точки до прямої.

Розв'язок: З метою демонстрації векторних операцій, розв'язання задачі виконаємо без використання операції векторного множення (п. 2.3 задача 6).

Проведемо через задану точку радіус-вектора $\boldsymbol{R}$ площину, перпендикулярну до даної прямої (рисунок 17). Позначимо через $\boldsymbol{r}$ – радіус-вектор точки перетину прямої і площини. Тоді шукану відстань можна знайти як довжину вектора

$$\rho=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})^2}.$$

Тут точка радіус-вектора $\boldsymbol{r}$ буде задовольняти одночасно двом співвідношенням:

$$\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}\right)=0 \text{ і } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{a}.$$

Тоді, виключаючи параметр λ отримаємо:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\frac{\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}\right)}{\left|\boldsymbol{a}\right|^2}\boldsymbol{a}.$$

Отже,

$$\rho=\sqrt{\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0-\frac{\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}\right)}{\left|\boldsymbol{a}\right|^2}\boldsymbol{a}\right)^2}=\sqrt{\left|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0\right|^2-\frac{\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}\right)^2}{\left|\boldsymbol{a}\right|^2}}$$

Задача 3. Знайти відстань між прямими $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}+\tau\boldsymbol{a}_1$ і $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{02}+\tau\boldsymbol{a}_2$.

Розв'язок: 1. Якщо вектори $\boldsymbol{a}_1$ і $\boldsymbol{a}_2$ прямих колінеарні, то рішення, як випливає з рисунка 18, можна знайти за формулою

$$\rho=\frac{S}{\left|\boldsymbol{a}_1\right|}=\frac{\left|\left[\boldsymbol{r}_{02}-\boldsymbol{r}_{01},\boldsymbol{a}_1\right]\right|}{\left|\boldsymbol{a}_1\right|}.$$

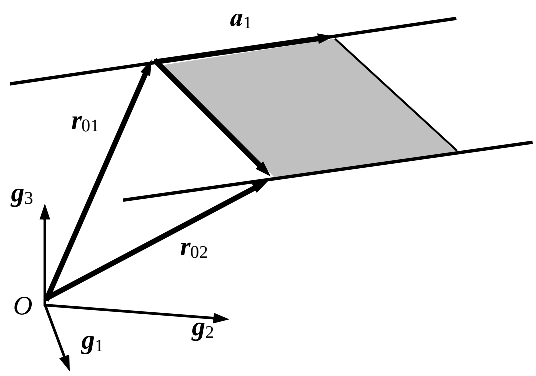


Рисунок 18

2. Якщо вектори $\boldsymbol{a}_1$ і $\boldsymbol{a}_2$ прямих не паралельні (рисунок 19). Будуємо пару площин, паралельних цим векторам, одна з яких містить точку $\boldsymbol{r}_{01}$, інша – $\boldsymbol{r}_{02}$. Тоді об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ і $\boldsymbol{r}_{01}$ - $\boldsymbol{r}_{02}$, дорівнює добутку площі паралелограма в його основі на шукану величину ρ. Звідки знаходимо,

$$\rho=\frac{\left|\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{r}_{02}-\boldsymbol{r}_{01}\right)\right|}{\left|\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right]\right|}.$$

Задача 4. Дано площину $\left(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}\right)=d$ та пряму $\left[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}\right]=\boldsymbol{q}$ (плюкерове рівняння прямої п.2.3). Знайти радіус-вектор $\boldsymbol{R}$ точки їх перетину.

Розв'язок: Помножимо обидві частини рівняння прямої векторно зліва на вектор $\boldsymbol{n}$ і отримаємо,

$$\left[\boldsymbol{n},\left[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}\right]\right]=\left[\boldsymbol{n},\boldsymbol{q}\right].$$

Замість поточної точки з радіус-вектором $\boldsymbol{r}$ в отримане рівняння підставимо шукану точку радіус-вектора $\boldsymbol{R}$ і до виразу ліворуч застосовуємо прави-

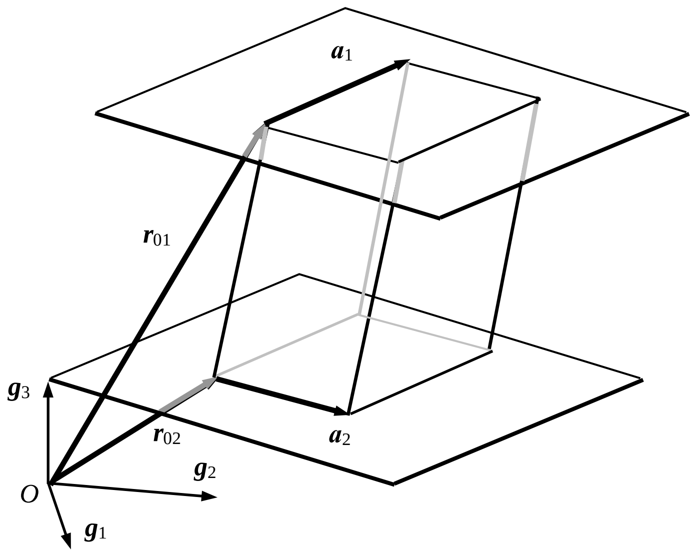


Рисунок 19

ло обчислення подвійного добутку векторів (*означення 2.6*):

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})=[\boldsymbol{n},\boldsymbol{q}].$$

Оскільки точка з радіус-вектором $\boldsymbol{R}$ належить і площині, то виконується рівність.

Тоді, при обмеженні $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})\neq 0$, отримуємо

$$\boldsymbol{R}=\frac{d\boldsymbol{p}-[\boldsymbol{n},\boldsymbol{q}]}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})}.$$

3. ІНШІ ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНІКИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Векторне числення дає у наші руки апарат, вельми дієвий не тільки на вищих ступенях розвитку науки, а й в застосуванні до питань елементарної математики.

Задача 1. *Теорема*. Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1 (рахуючи від вершини до протилежної сторони).

Доведення. Елементарно – геометричне доведення теореми відоме з курсу елементарної геометрії [5]. Тут проведемо векторне доведення. Будемо визначати положення кожної точки радіус-вектором цієї точки. Нехай точкам *A, B, C* (рисунок 20) відповідають вектори $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ і $\boldsymbol{r}_3$. Розглянемо спочатку одну медіану *AM*, візьмемо на ній точку *O*, яка визначається співвідношенням *AO* : *OM* = 2 : 1. Тоді

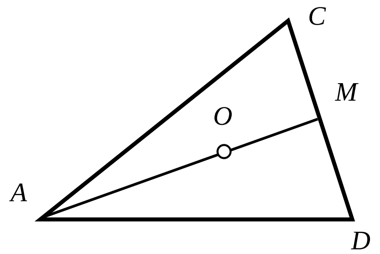


Рисунок 20

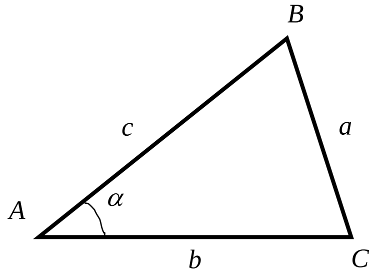
$$\boldsymbol{r}_M = \frac{\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3}{2}, \text{ отже, } \boldsymbol{r}_O = \frac{\boldsymbol{r}_1 + 2\boldsymbol{r}_M}{1+2} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3}{3}.$$

З того, що отримане для $\boldsymbol{r}_0$ вираз симетрично щодо індексів 1, 2, 3, то таке ж обчислення можемо провести для інших медіан. Звідси випливає справедливість теореми. ■

Задача 2. Дано трикутник *ABC*. Довести теорему косинусів.

Доведення: Розглянемо сторони трикутника як вектори. Запишемо,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = a$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = b$, $\left|\overrightarrow{BA}\right| = c$. Маємо, $a^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$. На підставі властивостей скалярного добутку отримаємо:

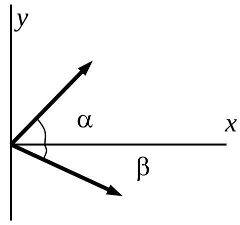


$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Але $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = bc\cos(\pi - \alpha) = -bc\cos\alpha$.

Отже, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. ■

Задача 3. Довести, що $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.



Доведення: Скористаємося формулою скалярного добутку для обчислення косинуса кута, застосувавши її до двох ***a*** і ***b*** одиничних векторів, які лежать у площині О*xy* та складають з координатною віссю *x* кути α та – β. При цьому отримаємо,

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\cos\alpha,\ b_x=|\boldsymbol{b}|\cos(-\beta)=\cos\beta,$$

$$a_y=\sin\alpha,\ a_y=-\sin\beta,\ a_z=b_z=0.$$

Таким чином маємо,

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\ \blacksquare$$

Задача 4. Довести, що $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

Доведення: Розглянемо два одиничні вектори ***a*** і ***b*** з попереднього прикладу. Обчислимо проекцію векторного добутку $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ на вісь *z*:

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})_z=b_xa_y-b_ya_x=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Але, $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})_z=\sin(\alpha+\beta)$.

Доведено. $\blacksquare$

Задача 5. Розв’язати векторне рівняння:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=p \tag{35}$$

Розв’язок: Будемо припускати, що вектор ***a*** та скаляр *p* відомі. Визначення вектора ***x*** з даного рівняння можна розглядати як дію, обернену до *скалярного множення*.

Перш за все цьому рівнянню задовольняє вектор ***x*** колінеарний до вектора ***a***. Тоді, вважаючи що ***x*** **=** λ ***a***, маємо $\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=p$. Звідки $\lambda=\dfrac{p}{\boldsymbol{a}^2}$.

Таким чином, отримаємо, $\boldsymbol{x}=\dfrac{p}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$.

Аналогічно, для довільного вектора ***b***, не перпендикулярного до вектора ***a*** можемо записати, $\boldsymbol{x} = p\dfrac{\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$.

Зауважимо, що скалярний добуток (***a*, *x***) не зміниться, якщо до вектора ***x*** додати вектор, перпендикулярний до вектора ***a***, тобто

$$\boldsymbol{x} = p\frac{\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} + [\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}], \tag{36}$$

де вектор ***c*** – довільний вектор. Таким чином, початкове векторне рівняння невизначене.

Задача 6. Розв'язати векторне рівняння:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}. \tag{37}$$

Розв'язок: Очевидно, що вектори ***a*** та ***q*** пов'язані співвідношенням (***a*, *q***) = 0. Будемо шукати рішення початкового рівняння в формі

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}.$$

Один з векторів ***b*** або ***d*** можемо вибрати довільно. Підставляючи вираз для вектора ***x*** в ліву частину рівняння, знаходимо:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{q}.$$

Нехай вектор ***b*** колінеарний до вектора ***q*** і скалярний добуток (***a*, *d***) ≠ 0. Тоді, використовуючи співвідношення між векторами ***a*** і ***q***, знайдемо:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{q}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})} \text{ і } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} \times \frac{\boldsymbol{d}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})}.$$

Тут ***d*** – довільний вектор. Рішення не зміниться, якщо до вектора ***x*** додати вектор, що є колінеарним до ***a***:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} \times \frac{\boldsymbol{d}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})} + \lambda\boldsymbol{a}, \tag{38}$$

де λ – довільний скаляр. Отже, рівняння, що визначає результат дії, оберненої до дії векторного множення, також невизначене.

Зауважимо, що система рівнянь (35) та (37) має єдиний розв'язок:

$$\boldsymbol{x} = p\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2} + \boldsymbol{q} \times \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}. \tag{39}$$

Припустивши, що вектор $\boldsymbol{x}$ визначається з системи рівнянь $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = p_i$, i = 1, 2, 3, де вектори $\boldsymbol{a}_i$ – не компланарні. Скориставшись рішенням рівняння, (35) запишемо:

$$\boldsymbol{x} = p_1 \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)} + p_2 \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1)} + p_3 \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)}. \tag{40}$$

Задача 7. Знайти скалярний добуток двох векторних добутків:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \tag{41}$$

Розв'язок: Скористаємося формулою змішаного добутку трьох векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$. Тоді маємо:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}))$$

Відповідно до властивостей змішаного добутку запишемо:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})) = \boldsymbol{a} \cdot \{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\} =$$

$$= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}). \tag{42}$$

Інший тотожний запис (42):

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

Задача 8. Знайти векторний добуток двох векторних добутків:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \tag{43}$$

Розв'язок: Даний добуток може бути розглянуто як подвійний векторний добуток двояко, один раз, як складений з трьох векторів $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$і $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, другий раз – з трьох векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$. Користуючись, відповідними формулами розкладання подвійного векторного добутку, знаходимо:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \tag{44}$$

В другому випадку

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}). \tag{45}$$

Зіставляючи два рівності (44) та (45) приходимо до наступної лінійної залежності, що зв'язує будь-які чотири вектори:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}). \tag{46}$$

Задача 9. Використовуючи (46), знайти розкладання довільного вектора $\boldsymbol{x}$ за трьома некомпланарними векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Розв'язок: У відомому афінному розкладанні

$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$, де $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \neq 0$, знаходимо коефіцієнти.

З цією метою помножимо обидві частини рівності скалярно на вектор $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, помічаючи, що $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = 0$. Знайдемо:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \Rightarrow \alpha = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}}.$$

Аналогічно знайдемо коефіцієнти β і γ, множачи по черзі на вектори $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Остаточно отримаємо:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{xbc}}{\boldsymbol{abc}}\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{axc}}{\boldsymbol{abc}}\boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{abx}}{\boldsymbol{abc}}\boldsymbol{c}. \quad (47)$$

Задача 10. Записати добуток двох змішаних добутків через вектори, які є їх складовими.

$$(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{xyz}) \quad (48)$$

Розв'язок: Звільняючи рівність (47) від знаменника, переходимо до співвідношення

$$(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{xbc})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{axc})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{abx})\boldsymbol{c}.$$

Користуючись правом циклічної перестановки співмножників в змішаному добутку, перепишемо рівність у вигляді:

$$(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{xbc})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{xca})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{xab})\boldsymbol{c}$$

і замінимо в цій тотожності вектор $\boldsymbol{x}$ на вектор $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$, отримаємо

$$(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = ((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))\boldsymbol{a} + ((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}))\boldsymbol{b} + ((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))\boldsymbol{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{c} \end{vmatrix}\boldsymbol{a} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{a} \end{vmatrix}\boldsymbol{b} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} \end{vmatrix}\boldsymbol{c}.$$

Помноживши скалярно рівність на вектор $\boldsymbol{z}$, отримаємо:

$$(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{xyz}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{c} \end{vmatrix}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{z}) + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{a} \end{vmatrix}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{z}) + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} \end{vmatrix}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{z}),$$

де права частина рівності є розкладанням визначника третього порядку. Таким чином маємо:

$$(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{xyz}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}. \tag{49}$$

Формулу (47) можна переписати наступним чином

$$\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x}\cdot\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{abc}}\right)\boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{x}\cdot\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{abc}}\right)\boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{x}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{abc}}\right)\boldsymbol{c}$$

Поклавши для стислого запису

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{abc}},\ \boldsymbol{b}^* = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{abc}},\ \boldsymbol{c}^* = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{abc}} \tag{50}$$

будемо шукати формулу Гіббса:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}^*)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}^*)\boldsymbol{c}. \tag{51}$$

Між векторними трійками векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ можна помітити такі співвідношення: 1) кожен вектор однієї трійки перпендикулярний до двох векторів іншої трійки; 2) скалярний добуток кожного вектору однієї трійки на однойменний з ним вектор іншої трійки, дорівнює одиниці.

Трійку некомпланарних векторів $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$, що мають перераховані вище властивості по відношенню до базисних векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, називають *взаємним базисом*. Цей термін має такий зміст: базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ може бути отримано з базису $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ тією ж побудовою, якою останній базис отримується з першого.

Задача 11. Знайти невідомий вектор, знаючи його скалярні добутки на три задані вектори.

Розв'язок: Маємо для невідомого вектора $\boldsymbol{x}$ три рівняння:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} = \alpha,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} = \beta \text{ і } \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c} = \gamma.$$

Згідно з формулою (51), для трьох некомпланарних векторів $\boldsymbol{abc} \neq 0$ можемо записати:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^* + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}^* + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}^*,$$

тоді, з урахуванням співвідношень (50), отримаємо,

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a}^* + \beta \boldsymbol{b}^* + \gamma \boldsymbol{c}^* = \frac{\alpha \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \beta \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \gamma \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{abc}}.$$

Розглянувши велике число завдань, сформульованих та розв’язаних у векторному вигляді, та оцінивши переваги техніки перетворень векторних об'єктів, завершимо цей практикум прикладом доведення ознаки векторності об'єкта.

Задача 12. Довести, що нескінченно малі повороти сфери (рисунок 2) є векторами.

Доведення: Введемо вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$. Перший поворот сфери будемо характеризувати зміщенням її точки з положення A_1 у A_2, а другий – з положення A_2 у A_3. Якщо прийняти відповідні до даних зсувів кути α_1, α_2, α_3 малими, то можна записати

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_1} + \left(\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA_1}\right).$$

Дійсно, $\left|\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA_1}\right| = \alpha_1 OA_1 = \overset{\smile}{A_1A_2} = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$ і, окрім того, вектор $\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA_1}$ напрямлений у ту ж сторону, що й вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Аналогічно, $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{OA_2} + \left(\boldsymbol{\alpha}_2 \times \overrightarrow{OA_2}\right)$. Підставляючи сюди отриманий вище вираз для $\overrightarrow{OA_2}$, запишемо:

$$\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \left(\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA_1}\right) + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \left(\overrightarrow{OA_1} + \left(\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA_1}\right)\right) =$$

$$= \overrightarrow{OA_1} + \left(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\right) \times \overrightarrow{OA_1} + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \left(\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA_1}\right).$$

З іншого боку, якщо ввести поворот α_3, що переводить точку з A_1 в A_3, знайдемо, $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \left(\boldsymbol{\alpha}_3 \times \overrightarrow{OA_1}\right)$.

Остаточно, якщо кути α_1, α_2, α_3 нескінченно малі величини, то тоді і тільки тоді, при порівнянні $\overrightarrow{OA_3}$ без урахування нескінченно малих другого порядку, отримуємо:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1.$$

Отже, нескінченно малі повороти є векторами, бо підпорядковані законам векторної алгебри. Тому при розв’язанні завдань до них може бути застосована вся техніка векторних перетворень, наведена в цьому посібнику. ■

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

1. Відомо координати вершин A і B трикутника ABC та координати його центру G :

   1) A (4, 1), B (3, -2), G (0, 2);

   2) A (3, 5), B (-1, -3), G (1, 1);

Знайти координати третьої вершини C трикутника.

Розв'язок: Радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ центра C даного трикутника визначається за формулою:

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C).$$

Згідно до теореми про координати лінійної комбінації [1] декількох векторів, маємо:

$$x = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \text{ и } y = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C).$$

Отже, в першому пункті завдання отримаємо:

$$0 = \frac{1}{3}(4 + 3 + x_C),$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 - 2 + y_C),$$

звідки x_C = - 7, y_C = 7 і C (-7, 7).

2. В результаті паралельного перенесення, що характеризується вектором $\boldsymbol{a}$, трикутник ABC перетворено на трикутник $A_1B_1C_1$. Знайти координати вершин трикутника $A_1B_1C_1$, якщо

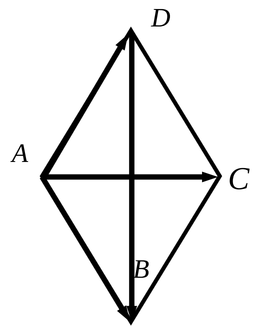
   1. A (0, 3), B (4, -2), C (-1, -2), $\boldsymbol{a}$ (4, 1),
   2. A (1, 4), B (5, -1), C (-2, -3), $\boldsymbol{a}$ (1, -2).

3. Довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

Розв'язок: Нехай дано ромб $ABCD$ (рисунок). Тоді

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|.$$

З другої рівності випливає, що $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AD}^2$ або



$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=0.$$

Але $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Отже,

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0, \text{ тобто } \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}.$$

4. Довести, що діагоналі прямокутника рівні між собою.

5. У трикутнику ABC дві медіани рівні ($AA_1 = BB_1$). Довести, що трикутник рівнобедрений.

Розв'язок: За умовою задачі маємо:

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2, \text{ де } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BB_1}.$$

Звідси запишемо:

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=0$ або $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0$, тобто. третя медіана CC_1 перпендикулярна до сторони AB, тому трикутник ABC рівнобедрений.

6. У чотирикутнику суми квадратів протилежних сторін рівні. Довести, що діагоналі такого чотирикутника перпендикулярні.

7. Довести, що необхідну і достатню умову належності чотирьох точок $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, $A_2(\boldsymbol{r}_2)$, $A_3(\boldsymbol{r}_3)$, $A_4(\boldsymbol{r}_4)$ одній площині, може бути представлено у вигляді:

$$\begin{cases}\alpha_1\boldsymbol{r}_1+\alpha_2\boldsymbol{r}_2+\alpha_3\boldsymbol{r}_3+\alpha_4\boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{o},\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\end{cases}$$

за умови, що всі α_i не дорівнюють нулю одночасно.

Розв'язок: Нехай точки $A_i(\boldsymbol{r}_i)$ належать одній площині. Беручи за полюс точку $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, запишемо умову лінійної залежності векторів $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1$:

$$\alpha(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+\beta(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\gamma(\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{o} \text{ або } (-\alpha-\beta-\gamma)\boldsymbol{r}_1+\alpha\boldsymbol{r}_2+\beta\boldsymbol{r}_3+\gamma\boldsymbol{r}_4=0$$

і сума коефіцієнтів при $\boldsymbol{r}_i$ дорівнює нулю.

Навпаки, якщо з системи

$$\begin{cases}\alpha_1 \boldsymbol{r}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{r}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{r}_3 + \alpha_4 \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{o}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0\end{cases}$$

виключити, наприклад α_1, вважаючи, що $\alpha_1 \neq 0$, то отримаємо

$$\alpha(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \beta(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) + \gamma(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{o},$$

що і вказує на компланарність векторів $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1$ або розміщення чотирьох точок $A_i(\boldsymbol{r}_i)$ в одній площині.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A_0(\boldsymbol{r}_o)$ паралельно до векторів $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

9. Скласти рівняння площини, що проходить через дві прямі, які перетинаються $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \mu\, \boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq 0$.

10. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A_o(\boldsymbol{r}_o)$ і пряму $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{a}$.

11. Обчислити D, якщо площина $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + D = 0$ проходить через точку $A_1(\boldsymbol{r}_1)$.

12. Записати необхідну і достатню умови збігу двох площин $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r} + C_1 = 0$ і $\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{r} + C_2 = 0$.

13. Знайти відстань між паралельними площинами $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} + C_1 = 0$ і $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} + C_2 = 0$.

Розв'язок: Перетнемо дані площині прямою $\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{p}$ та знайдемо радіус-вектор точок перетину A_1 ($\boldsymbol{r}_1$) і A_2 ($\boldsymbol{r}_2$):

$$\lambda_1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} + C_1 = 0,\ \lambda_2 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} + C_2 = 0.$$

Звідси маємо:

$$\boldsymbol{r}_1 = -\frac{C_1}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}} \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{r}_2 = -\frac{C_2}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}$$

Таким чином, шукана відстань дорівнює:

$$d = \frac{|A_1 A_2 \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|C_1 - C_2|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

14. Дано дві паралельні площини $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} + C_1 = 0$ і $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} + C_2 = 0$. Записати рів-

няння середньої площини.

15. Знайти відстань від точки $A_0(\boldsymbol{r}_o)$ до площини $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + D = 0$.

16. Знайти косинус і синус кута між площинами $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}_1\,\boldsymbol{q}_1 + D_1 = 0$ і $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}_2\,\boldsymbol{q}_2 + D_2 = 0$.

17. Скласти параметричне рівняння висоти трикутника $A_1A_2A_3$, заданого радіус-векторами $\boldsymbol{r}_i$ своїх вершин.

18. Виразити висоти трикутника $A_1A_2A_3$ через радіус-вектори $\boldsymbol{r}_i$ його вершин.

19. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки A_1 $(\boldsymbol{r}_1)$ і A_2 $(\boldsymbol{r}_2)$.

20. Скласти параметричне рівняння серединного перпендикуляра для відрізку з кінцями у точках A $(\boldsymbol{r}_1)$ і B $(\boldsymbol{r}_2)$.

21. Знайти радіус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ точки P_2, симетричній $P_1(\boldsymbol{r}_1)$ відносно прямої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a}$.

Розв'язок: З умови задачі випливає, що

$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot \boldsymbol{a} = 0$ и $\dfrac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2} = \boldsymbol{r}_o + \lambda \boldsymbol{a}$, звідки

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 - 2\boldsymbol{r}_o)\cdot \boldsymbol{a}}{2\boldsymbol{a}^2} = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o)\cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{r}_o - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o)\cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}.$$

22. Скласти параметричне рівняння прямої, симетричної до прямої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \mu\, \boldsymbol{b}$ відносно даної прямої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a}$.

23. Знайти радіус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ точки перетину прямих $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r} = d_1$ і $\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{r} = d_2$.

Розв'язок: Відомо, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину. Тоді з умови компланарності векторів маємо:

$$\boldsymbol{r}_0 = \lambda \boldsymbol{n}_1 + \mu \boldsymbol{n}_2.$$

Знайдемо коефіцієнти лінійної комбінації векторів з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda \boldsymbol{n}_1{}^2 + \mu \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = d_1 \\ \lambda \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 + \mu \boldsymbol{n}_2{}^2 = d_2 \end{cases}$$

Звідси маємо:

$$\lambda = \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} d_1 & \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 \\ d_2 & \boldsymbol{n}_2{}^2 \end{vmatrix},\ \mu = \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} \boldsymbol{n}_1{}^2 & d_1 \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 & d_2 \end{vmatrix},\ \det = \begin{vmatrix} \boldsymbol{n}_1{}^2 & \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 & \boldsymbol{n}_2{}^2 \end{vmatrix}.$$

24. Скласти векторне рівняння прямої, яка проходить через точку $A_0(\boldsymbol{r}_o)$ і перетинає прямі $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{p}_1$ і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{p}_2$.

25. Обчислити найкоротшу відстань між протилежними ребрами A_1A_2 і A_3A_4 чотиригранника $A_1A_2A_3A_4$, заданого радіус-векторами $\boldsymbol{r}_i$ його вершин, якщо об’єм чотиригранника дорівнює одиниці.

26. Вершини трикутника знаходяться в точках $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, $A_2(\boldsymbol{r}_2)$, $A_3(\boldsymbol{r}_3)$. Написати рівняння бісектрис кутів трикутника.

Розв’язок: Покладемо для стислого запису $\boldsymbol{a}^o = \dfrac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2|}$, $\boldsymbol{b}^o = \dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3|}$ і $\boldsymbol{c}^o = \dfrac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}$, де $\boldsymbol{a}^o$, $\boldsymbol{b}^o$, $\boldsymbol{c}^o$ – одиничні вектори векторів сторін трикутника $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$ відповідно. Тоді бісектриса кута $\angle A_1$ паралельна до вектора $\boldsymbol{c}^o - \boldsymbol{b}^o$ і перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{c}^o + \boldsymbol{b}^o$. Тому рівняння цієї бісектриси може бути записано в одному з наступних варіантів:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{c}^o + \boldsymbol{b}^o) = 0 \text{ або } (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{c}^o - \boldsymbol{b}^o) = 0.$$

Аналогічно й для інших кутів трикутника.

27. Знайти основу перпендикуляра, опущеного з точки $\boldsymbol{r}_1$ на пряму $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}$.

Розв’язок: Задача зводиться до знаходження вектору $\boldsymbol{r}$ з рівнянь

$\begin{cases} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\cdot \boldsymbol{a} = 0 \end{cases}$. Помноживши перше рівняння векторно на $\boldsymbol{a}$, знайдемо

$a^2\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{M}$, але в силу другого рівняння: $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{a}$. Отримаємо

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}}{a^2}.$$

28. Записати необхідну і достатню умови паралельності прямої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{a}$ та площини $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{pq} + D = 0$.

29. Знайти точку $A_0(\boldsymbol{r}_0)$ перетину прямої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{a}$ з площиною $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{pq} + D = 0$.

Розв'язок: Радіус-вектор точки перетину прямої та площини задовольняє рівнянню площини. Тому

$$\left(\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{pq} + D = 0. \text{ Звідси } \lambda = -\frac{D + \boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{pq}} \text{ і } \boldsymbol{r}_o = \boldsymbol{r}_1 - \frac{D + \boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{pq}}\boldsymbol{a}.$$

30. Знайти точку перетину прямої $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}$ та площини $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = d$.

31. Знайти радіус-вектор точки $A_2\ (\boldsymbol{r}_2)$, симетричної точці $A_1\ (\boldsymbol{r}_1)$ відносно площини $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} + C = 0$.

Розв'язок: Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \lambda\,\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n} \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2} + C = 0 \end{cases},$$

що відповідає перетину заданої площини і перпендикуляра, отримаємо спочатку вираз для λ, а потім знайдемо шуканий вектор

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 + C}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n}.$$

32. Знайти радіус-вектор точки $A_2\ (\boldsymbol{r}_2)$, симетричної точці $A_1\ (\boldsymbol{r}_1)$ відносно прямої $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = d$.

33. Знайти основу перпендикуляра, опущеного з полюса на лінію перетину площин $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r} = d_1$, $\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{r} = d_2$.

34. Написати рівняння прямої, проведеної через точку $A_1\ (\boldsymbol{r}_1)$ паралельно до площин $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r} = d_1$, $\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{r} = d_2$.

35. Написати рівняння площини, проведеної через точку $A_1\ (\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно до прямої $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}$.

36. Написати рівняння площини, проведеної через точку $A_1\ (\boldsymbol{r}_1)$ паралельно до прямих $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{M}_2$.

37. Якій умові повинні задовольняти радіус-вектори трьох точок $A_1(\boldsymbol{r}_1)$,

$A_2(\boldsymbol{r}_2)$, $A_3(\boldsymbol{r}_3)$ для того, щоб вони належали одній прямій.

38. Виразити площу S трикутника через радіус-вектори точок $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, $A_2(\boldsymbol{r}_2)$, $A_3(\boldsymbol{r}_3)$ його вершин.

39. Вершини тетраедра (будь-яка трикутна піраміда) знаходиться в точках $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$, $C(\boldsymbol{r}_3)$, $D(\boldsymbol{r}_4)$. Написати рівняння прямої, яка проходить через A паралельно до медіани BM трикутника BCD.

40. Написати рівняння прямої, що з'єднує початок координат з точкою $A(\boldsymbol{r}_1)$.

41. Написати рівняння площини, що проходить через початок координат і точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$.

42. Написати рівняння геометричного міста точок у просторі, рівновіддалених від двох даних точок $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, $A_2(\boldsymbol{r}_2)$.

43. Знайти кут між прямими $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \mu\, \boldsymbol{b}$.

44 Знайти кут між прямою $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\, \boldsymbol{a}$ та площиною $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = d$.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

2. $\boldsymbol{r}_{A_1} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{a}$. *Вказівка*: Скористатися теоремою про координати суми двох векторів.

1) $A_1(4, 4)$, $B_1(8, -1)$, $C_1(3, -1)$,
2) $A_1(2, -2)$, $B_1(6, -3)$, $C_1(-1, -5)$.

6. *Вказівка*: Прийняти точку перетину діагоналей за полюс і врахувати, що радіус-вектори протилежних вершин колінеарні.

8. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = 0$.

9. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$.

10. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a} = 0$.

11. $D = -\boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}$.

12. $C_1\boldsymbol{n}_2 + C_2\boldsymbol{n}_1 = 0$.

14. $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} + \dfrac{C_1 + C_2}{2} = 0$.

15. $d = \dfrac{|\boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + D|}{|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}|}$.

16. $cos\,\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{q}_1) \cdot (\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{q}_2|}$, $\sin\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{q}_1) \times (\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{q}_2|}$.

17. Рівняння висоти A_1A_1' має вигляд: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2)$.

18. $h_1 = \dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2)|}{|\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2|}$, аналогічно для h_2 і h_3.

19. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = 0$.

20. $\boldsymbol{r}_2 = \dfrac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2} + \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ або $\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2{}^2 - \boldsymbol{r}_1{}^2)$.

22. *Вказівка*: Використовувати результат задачі 21, знайти радіус-вектори точок, симетричних до двох довільних точок першої прямої відносно даної. Для зручності взяти точки:

$P_1(\boldsymbol{r}_1)$, $Q_1(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{b})$; $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\,\boldsymbol{p}$, де $\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{r}_o - \boldsymbol{r}_1 + 2\dfrac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o) \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{b} + 2\dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$.

24. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \alpha\,\boldsymbol{p}$, де $\boldsymbol{p} = [(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p}_1] \times [(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p}_2]$.

25. $\delta = \dfrac{1}{\left|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_3)\right|}$.

28. $\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + D \neq 0$.

30. $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M} + d\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}}$. *Вказівка*: Використовувати результат задачі 29, помножити перше рівняння векторно на $\boldsymbol{n}$.

32. $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - 2\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1 - d}{n^2}\boldsymbol{n}$. *Вказівка*: якщо $\boldsymbol{r}_2$ – шуканий радіус-вектор, то вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ є перпендикулярним до даної прямої, відповідно паралельний до вектора $\boldsymbol{n}$; точка $\dfrac{\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1}{2}$ лежить на даній прямій.

33. $\boldsymbol{r}_P = \dfrac{d_1 n_2^2 - d_2 \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{n_1^2 n_2^2 - (\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)^2}\boldsymbol{n}_1 + \dfrac{d_2 n_1^2 - d_1 \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{n_1^2 n_2^2 - (\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)^2}\boldsymbol{n}_2$. *Вказівка*: Якщо P – основа перпендикуляра, то радіус-вектор точки основи $\boldsymbol{r}_P = \alpha\boldsymbol{n}_1 + \beta\boldsymbol{n}_2$.

34. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2) = 0$.

35. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{a} = 0$.

36. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0$.

37. $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0$ або $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1 = 0$.

38. $S = \dfrac{1}{2}\left|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\right|$.

39. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda(2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4)$.

40. $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{r}_1$.

41. $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{r}_1 + \mu\boldsymbol{r}_2$.

42. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)^2 = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2)^2$.

43. $\cos\varphi = \pm\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}$.

44. $\sin\varphi = \dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{\sqrt{a^2}\sqrt{n^2}}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1987.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Вища школа. Изд.-во при Харьк. ун-те, 1986. – 216с.
3. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.- М.: Изд.-во АН СССР, 1951.
4. Дубнов Я.С. Основы векторного исчисления. - М.: ОГИЗ, Часть 1, 1939.
5. Майоров В.М., Скопец З.А. Задачник – практикум по векторной алгебре. - М.: Учпедгиз, 1961.
6. Бурлаенко В. Н., Димитрова С.Д. Приложения векторной алгебры к решению задач геометрии. Практикум по курсу высшей математики – Харьков: НТУ «ХПИ» 2005. – 49с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Дімітрова Світлана Дімова
Бурлаєнко В'ячеслав Миколайович
Гиря Наталія Петрівна

Розв'язання задач аналітичної геометрії векторним методом

для студентів інженерних спеціальностей

Українською мовою

Роботу до видання рекомендував проф. Іглін С.П.

В авторській редакції